1.4.2. Ters Operatör Yöntemi

$\ell(D)y = B(x)$ denkleminin bir özel çözümü $y_ö$ ise
$\ell(D)y_ö = B(x)$ sağlanır. $\ell(D)$ lineer diferansiyel operatörünün
ters operatörü $\ell^{-1}(D) = \dfrac{1}{\ell(D)}$ olarak tanımlanırsa

$$\ell^{-1}(D)\left(\ell(D)y_ö\right) = \ell^{-1}(D)B(x)$$

$$\Rightarrow \quad y_ö = \ell^{-1}(D)B(x) = \frac{1}{\ell(D)}B(x)$$ olarak bulunur.

$D = \dfrac{d}{dx}$ türev operatörü olduğu için türevin tersi olarak
$\dfrac{1}{D}$ operatörüne integral operatörü olarak bakılabilir.

$$\frac{1}{D}x = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}, \qquad \frac{1}{D}1 = \int 1\,dx = x,$$

$$\frac{1}{D^2}x = \frac{1}{D}\left(\frac{1}{D}x\right) = \frac{1}{D}\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6}$$ olur.

Ters Operatörün Temel Özellikleri

1) $L(D)\left(L^{-1}(D)\,y(x)\right) = y(x)$

2) Ters operatör lineer dir yani

$$L^{-1}(D)\left(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\right) = c_1 L^{-1}(D) y_1(x) + c_2 L^{-1}(D)\, y_2(x)$$ sağlanır.

3) $L_1^{-1}(D)\,L_2^{-1}(D)\,y(x) = L_2^{-1}(D)\,L_1^{-1}(D)\,y(x)$

4) $\left(L_1^{-1}(D) + L_2^{-1}(D)\right) y(x) = L_1^{-1}(D)\,y(x) + L_2^{-1}(D)\,y(x)$

5) $\dfrac{L_1(D)}{L_2(D)}\,y(x) = L_1(D)\left(\dfrac{1}{L_2(D)}\,y(x)\right)$

6) $L_1(D)\,y = L_2(D)\,f(x)$ ise $\quad y = \dfrac{L_2(D)}{L_1(D)}\,f(x)$

7) $\left(\dfrac{L_1(D)}{L_3(D)} + \dfrac{L_2(D)}{L_3(D)}\right) y = \left(\dfrac{L_1(D) + L_2(D)}{L_3(D)}\right) y$

Teorem 11: $\ell(D)y = B(x)$ denkleminde $B(x) = e^{ax}$ olsun. Bu durumda

a, $\ell(a) \neq 0$ olacak şekilde reel veya kompleks bir sabit ise

$$y_ö = \ell^{-1}(D)e^{ax} = \frac{1}{\ell(D)}e^{ax} = \frac{1}{\ell(a)}e^{ax} \quad \text{dır.}$$

İspat: Teorem 10 da $\ell(D)e^{ax} = e^{ax}\ell(a)$, $\ell(a) \neq 0$ olduğu ispat edilmişti. Buradan

$$\ell^{-1}(D)\left(\ell(D)e^{ax}\right) = \ell^{-1}(D)\left(e^{ax}\ell(a)\right)$$

$$\Rightarrow \quad e^{ax} = \ell(a)\,\ell^{-1}(D)e^{ax}$$

$$\Rightarrow \quad e^{ax} = \ell(a)\frac{1}{\ell(D)}e^{ax}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\ell(D)}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{\ell(a)}, \quad \ell(a) \neq 0 \quad \text{dur.}$$

Örnek: $(D^2 - 3D + 8)y = e^{2x}$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{\ell(D)}e^{2x} = \frac{1}{(D^2-3D+8)}e^{2x} = \frac{1}{2^2-3.2+8}e^{2x} = \frac{1}{6}e^{2x} \quad \text{olur.}$$

Teorem 12: $L(D)y = B(x)$ denkleminde $B(x) = e^{ax} f(x)$ olsun. Bu durumda özel çözüm

$$y_ö = \frac{1}{L(D)}\left(e^{ax} f(x)\right) = e^{ax} \frac{1}{L(D+a)} f(x) \quad \text{dır.}$$

İspat: Teorem 10 da $L(D)\left(e^{ax} u(x)\right) = e^{ax} L(D+a)\, u(x)$ olduğu ispat edilmişti. Burada $u(x)$ yerine $\frac{1}{L(D+a)} f(x)$ alınırsa

$$L(D)\left(e^{ax} \frac{1}{L(D+a)} f(x)\right) = e^{ax} L(D+a) \frac{1}{L(D+a)} f(x)$$

$$\Rightarrow L(D)\left(e^{ax} \frac{1}{L(D+a)} f(x)\right) = e^{ax} f(x)$$

$$\Rightarrow \quad e^{ax} \frac{1}{L(D+a)} f(x) = \frac{1}{L(D)}\left(e^{ax} f(x)\right)$$

eşitliği sağlanır.

Örnek: $(D-1)^2 y = xe^x$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{\ell(D)}(xe^x) = \frac{1}{(D-1)^2}(xe^x) = e^x \frac{1}{(D-1+1)^2} x$$

$$= e^x \frac{1}{D^2} x = e^x\left(\frac{1}{D}\right)\left(\frac{1}{D} x\right) = e^x \frac{1}{D} \frac{x^2}{2} = e^x \frac{x^3}{6}$$

olur.

Not: Teorem 12., Teorem 11 deki $\ell(a)=0$ durumu içinde uygulanabilir. ($f(x)=1$ olarak düşününüz)

Örnek: $(D+2)^2 y = e^{-2x}$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz

$$y_ö = \frac{1}{(D+2)^2} e^{-2x} = \frac{1}{\underbrace{(-2+2)^2}_{0}} e^{-2x} \qquad \ell(-2)=0 \text{ oluyor.}$$

olmaktadır.

$$y_ö = \frac{1}{(D+2)^2} e^{-2x} \cdot 1 = e^{-2x} \frac{1}{(D-2+2)^2} 1 = e^{-2x} \frac{1}{D^2} 1 = e^{-2x} \frac{1}{D} x = e^{-2x} \frac{x^2}{2}$$

bulunur.

Not! a, $\ell(\lambda)$ karakteristik denklemin m katlı kökü olsun.
$\ell(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1}\lambda+a_n$ olmak üzere $f(\lambda)$ $n-m$. dereceden sabit katsayılı bir polinom ve $f(a)\neq 0$ olmak üzere

$$\ell(\lambda)=(\lambda-a)^m f(\lambda) \quad \text{ve dolayısıyla} \quad \ell(D)=(D-a)^m f(D)$$

yazılabilir.

$$y_ö=\frac{1}{\ell(D)}e^{ax}=\underbrace{\frac{1}{(D-a)^m f(D)}}_{\substack{\ell(a)=0 \\ \text{oluyor}}}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^m}\left(\frac{1}{f(D)}e^{ax}\right)=\frac{1}{(D-a)^m}\frac{1}{f(a)}e^{ax}$$

$$=\frac{1}{f(a)}\frac{1}{(D-a)^m}e^{ax}=\frac{1}{f(a)}e^{ax}\frac{1}{(D-a+a)^m}1$$

$$=\frac{1}{f(a)}e^{ax}\frac{1}{D^m}1=\frac{1}{f(a)}e^{ax}\frac{x^m}{m!} \quad \text{dur.}$$

Ⓐ $\ell(D)=(D-a)^n$ ise $y_ö=\dfrac{1}{(D-a)^n}e^{ax}=\dfrac{x^n e^{ax}}{n!}$ olur.

Örnek! $y'' + 4y' + y = 2e^{-x} + 1$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (3\lambda+1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1/3,\ \lambda_2 = -1$$

olup $y_h = c_1 e^{-\frac{1}{3}x} + c_2 e^{-x}$ olur.

$$y_ö = \frac{1}{\ell(D)}(2e^{-x}+1) = \underbrace{\frac{1}{\ell(D)}(2e^{-x})}_{y_{ö1}} + \underbrace{\frac{1}{\ell(D)}1}_{y_{ö2}}$$

$$\bullet\, y_{ö1} = \frac{1}{\ell(D)}2e^{-x} = \frac{1}{(3D+1)\underbrace{(D+1)}_{=0 \text{ oluyor}}}2e^{-x} = \frac{1}{D+1}\left(\frac{1}{3D+1}2e^{-x}\right)$$

$$= \frac{1}{D+1}\left(\frac{1}{3.(-1)+1}2e^{-x}\right) = -\frac{1}{D+1}e^{-x}$$

$$= -e^{-x}\frac{1}{(D-1+1)}1 = -e^{-x}\frac{1}{D}1 = -e^{-x}x$$

$\Rightarrow y_{ö1} = -e^{-x}x$ bulunur.

$$\bullet\ y_{\ddot{o}_2} = \frac{1}{f(D)}1 = \frac{1}{(3D+1)(D+1)}1 = \frac{1}{(3D+1)(D+1)}e^{0x}$$

$$= \frac{1}{(3.0+1)(0+1)}e^{0x} = 1$$

$\Rightarrow y_{\ddot{o}_2} = 1$ bulunur.

$\Rightarrow y_{\ddot{o}} = y_{\ddot{o}_1} + y_{\ddot{o}_2} = -e^{-x}x + 1$ dur.

Genel çözüm

$$y = y_h + y_{\ddot{o}} = c_1 e^{-\frac{1}{3}x} + c_2 e^{-x} - e^{-x}x + 1$$

olarak bulunur.

Teorem 13: $L(D)y = B(x)$ denkleminde $B(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ şeklinde n. dereceden bir polinom olsun. Bu durumda bir özel çözüm

$$y_ö = \frac{1}{L(D)} B(x) = \frac{1}{D^k (1 \mp \varphi(D))} B(x) = \frac{1}{D^k} \frac{1}{1 \mp \varphi(D)} B(x)$$

$$= \frac{1}{D^k} \left(1 \pm \varphi(D) \mp (\varphi(D))^2 \pm (\varphi(D))^3 \mp \dots \right) B(x)$$

ile bulunur. Burada $\varphi(D)$ derecesi $\leq n$ olan bir polinom ve $\varphi(0) = 0$ şeklindedir. Sağ tarafta $B(x)$ n. dereceden bir polinom olduğundan $(n+1)$. ve daha yüksek türevler sıfır olduğundan ifade sonludur.

Örnek: $y'' + y = 3x^2 + 1$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{L(D)} (3x^2+1) = \frac{1}{D^2+1} (3x^2+1) = \frac{1}{1+\underbrace{D^2}_{\varphi(D)}} (3x^2+1)$$

$\varphi(0) = 0$ duyor.

$$= (1 - D^2 + (D^2)^2 - (D^2)^3 + \dots)(3x^2+1)$$

$$y_ö = 3x^2+1 - D^2(3x^2+1) + D^4(3x^2+1) - D^6(3x^2+1) - \cdots$$
$$= 3x^2+1 - 6 + 0 + 0 + \cdots$$
$$y_ö = 3x^2-5 \quad \text{olur.}$$

Örnek: $y'' + 3y' + 2y = 3x^2 - x + 1$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{\varphi(D)}(3x^2-x+1) = \frac{1}{D^2+3D+2}(3x^2-x+1) = \frac{1}{1+\underbrace{1+D^2+3D}_{\varphi(D)}}(3x^2-x+1)$$

$\varphi(0)=1$ olup bu yazım uygun değildir!!

$$y_ö = \frac{1}{D^2+3D+2}(3x^2-x+1) = \frac{1}{2\left(1+\frac{D^2+3D}{2}\right)}(3x^2-x+1) \qquad \varphi(D) = \frac{D^2+3D}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{D^2+3D}{2} + \left(\frac{D^2+3D}{2}\right)^2 - \cdots\right)(3x^2-x+1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3x^2-x+1 - \frac{1}{2}(D^2+3D)(3x^2-x+1) + \frac{1}{4}(\cancel{D^4} + 6\cancel{D^3} + 9D^2)(3x^2-x+1) + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{3x^2-x+1 - \frac{1}{2}\{6+3.(6x-1)\} + \frac{1}{4}.9.6 + 0\right\} = \frac{1}{2}\{3x^2-10x+13\}$$

dur.

Teorem 14: $\ell(D)y = B(x)$ denkleminde $B(x) = \sin(ax+b)$ veya $B(x) = \cos(ax+b)$ olsun. Bu durumda ℓ operatörü D^2 nin bir polinomu ve $\ell(-a^2) \neq 0$ olmak üzere

$$y_ö = \frac{1}{\ell(D^2)}\sin(ax+b) = \frac{1}{\ell(-a^2)}\sin(ax+b)$$

$$y_ö = \frac{1}{\ell(D^2)}\cos(ax+b) = \frac{1}{\ell(-a^2)}\cos(ax+b) \quad \text{ile bulunur.}$$

İspat: Teorem 10 da $\ell(D^2)\sin(ax+b) = \ell(-a^2)\sin(ax+b)$ olduğu gösterildi. Buradan

$$\ell^{-1}(D^2)\left(\ell(D^2)\sin(ax+b)\right) = \ell^{-1}(D^2)\left(\ell(-a^2)\sin(ax+b)\right)$$

$$\sin(ax+b) = \ell^{-1}(D^2)\left(\ell(-a^2)\sin(ax+b)\right)$$

$$\sin(ax+b) = \ell(-a^2)\frac{1}{\ell(D^2)}\sin(ax+b)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ell(D^2)}\sin(ax+b) = \frac{\sin(ax+b)}{\ell(-a^2)}, \quad \ell(-a^2) \neq 0 \text{ dır.}$$

$\cos(ax+b)$ için de benzer ispat yapılabilir.

Örnek: $(D^4+D^2+1)y = \sin x + 2\cos 2x$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{D^4+D^2+1}\left(\sin x + 2\cos 2x\right) = \underbrace{\frac{1}{D^4+D^2+1}}_{a=1}\sin x + 2\cdot\underbrace{\frac{1}{D^4+D^2+1}}_{a=2}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{(-1)^2+(-1)+1}\sin x + 2\cdot\frac{1}{(-4)^2+(-4)+1}\cos 2x$$

$D^2 \longrightarrow -a^2$ yazılıyor

$$= \sin x + \frac{2}{13}\cos 2x$$

bulunur.

Örnek: $(D^3-D^2+1)y = \sin x$ bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{D^3-D^2+1}(\sin x) = \frac{1}{D.\underset{-1}{\underbrace{D^2}} - \underset{-1}{\underbrace{D^2}}+1}\sin x = \frac{1}{-D+2}\sin x$$

$(2+D)$

$$= \frac{2+D}{4-\underset{-1}{\underbrace{D^2}}}\sin x = \frac{1}{5}(2+D)\sin x$$

$$= \frac{1}{5}\{2\sin x + D\sin x\} = \frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x$$

özel çözümdür.

Sonuç: Teorem 14 de $\ell(-a^2)=0$ ise

$$\sin ax = \frac{1}{2i}\left(e^{iax} - e^{-iax}\right) \quad , \quad \cos ax = \frac{1}{2}\left(e^{iax} + e^{-iax}\right)$$

veya $\sin ax = \operatorname{Im}(e^{iax})$, $\cos ax = \operatorname{Re}(e^{iax})$

üstel formları ve Teorem 12 kullanılarak özel çözüm bulunur.

Örnek: $(D^2+1)y=\cos x$ denkleminin özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{D^2+1}\cos x \quad (\ell(-1^2)=0) \quad = \frac{1}{D^2+1}\,\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{D^2+1}e^{ix} + \frac{1}{D^2+1}e^{-ix}\right)$$

$-i^2+1$
$-1+1=0$

$$= \frac{1}{2}\left\{ e^{ix}\frac{1}{(D+i)^2+1}\,1 + e^{-ix}\frac{1}{(D-i)^2+1}\,1 \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ e^{ix}\frac{1}{D^2+2Di}\,1 + e^{-ix}\frac{1}{D^2-2Di} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ e^{ix}\frac{1}{D(D+2i)}e^{0x} + e^{-ix}\frac{1}{D(D-2i)}e^{0x} \right\}$$

$$y_ö = \frac{1}{2}\left\{ e^{ix}\frac{1}{2iD}1 + e^{-ix}\frac{1}{(-2i)D}1 \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{e^{ix}}{2i}x - \frac{e^{-ix}}{2i}x \right\} = \frac{x}{2}\left\{ \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \right\} = \frac{x}{2}\sin x$$

olarak bulunur.

Örnek: $(D^2+9)y = \sin 3x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda^2+9=0 \Rightarrow \lambda = \mp 3i \Rightarrow y_h = c_1\cos 3x + c_2 \sin 3x$$

dur.

$$\ell(-a^2) = \ell(-3^2) = -9+9=0 \text{ olduğundan}$$

$$y_ö = \frac{1}{D^2+9}\sin 3x = \frac{1}{D^2+9}\operatorname{Im}(e^{3ix}) = \operatorname{Im}\Big(\underbrace{\frac{1}{D^2+9}e^{3ix}}_{v(x)}\Big)$$

$v(x)$ dersek

$$v(x) = \frac{1}{D^2+9} e^{3ix} = e^{3ix} \frac{1}{(D+3i)^2+9} 1 = e^{3ix} \frac{1}{D^2+6iD} 1$$

$$= e^{3ix} \frac{1}{D \underbrace{(D+6i)}_{f(0)\neq 0}} e^{0x} = e^{3ix} \frac{1}{6i\,D} 1 = \frac{e^{3i}}{6i} x$$

$$= \frac{x}{6} \frac{e^{3i}}{i} = \frac{-x}{6} i e^{3i} = \frac{-x}{6} i \{ \cos 3x + i \sin 3x \}$$

$$= \frac{x}{6} \sin 3x - i \frac{x}{6} \cos 3x \qquad \text{" } i^2 = -1 \text{ "}$$

$$y_ö = \operatorname{Im} v(x) = \operatorname{Im}\left(\frac{x}{6} \sin 3x - i \frac{x}{6} \cos 3x \right)$$

$\Rightarrow y_ö = \frac{-x}{6} \cos 3x$ bulunur.

$y = y_h + y_ö = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x - \frac{x}{6} \cos 3x$ olur.

Teorem 15: $\ell(D)y = B(x)$ denkleminde $B(x) = x\,f(x)$ olsun. Bu durumda özel çözüm

$$y_ö = \frac{1}{\ell(D)}\,x f(x) = x\,\frac{1}{\ell(D)}f(x) - \frac{\ell'(D)}{\left(\ell(D)\right)^2}f(x)$$

ile bulunur.

Örnek: $(D^2+D+2)y = x\sin x$ denkleminin özel çözümünü bulunuz.

$\ell(D) = D^2+D+2$ için $\ell'(D) = 2D+1$ olur.

$B(x) = x\sin x$ için $f(x) = \sin x$ olup $x f(x)$ formundadır.

$$y_ö = \frac{1}{\ell(D)}x\sin x = x.\frac{1}{\underbrace{D^2}_{-1}+D+2}\sin x - \frac{2D+1}{(\underbrace{D^2}_{-1}+D+2)^2}\sin x$$

$$= x.\frac{1}{D+1}\sin x - \frac{2D+1}{(D+1)^2}\sin x$$

$(D-1)$ $\qquad$ $\underbrace{D^2}_{-1}+2D+\cancel{1}$

$$y_0^u = x \cdot \frac{D-1}{\underset{-1}{D^2}-1}\sin x - \frac{2D+1}{2D}\sin x$$

$$= -\frac{x}{2}(D-1)\sin x - \frac{1}{2}(2D+1).(-\cos x)$$

$$= -\frac{x}{2}\left\{D\sin x - \sin x\right\} + D(\cos x) + \frac{1}{2}\cos x$$

$$= -\frac{x}{2}\left\{\cos x - \sin x\right\} - \sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

olarak bulunur.

Uygulama 3

① $y^{(4)} - y''' = 1$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$P(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 = 0 \rightarrow \lambda^3(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \; \lambda_4 = 1$

olacağından homojen kısmın genel çözümü $y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^x$ dir.

$$y_ö = \frac{1}{D^4 - D^3}(1) = \frac{1}{-D^3 \underbrace{(1-D)}_{P(D)}} 1 = -\frac{1}{D^3}\left(1 + D + D^2 + \cdots\right)(1)$$

$$= -\frac{1}{D^3}\left(1 + \underbrace{D.1}_{0} + \underbrace{D^2 . 1}_{0} + \cdots\right) = -\frac{1}{D^3} 1 = -\frac{1}{D^2} x = -\frac{1}{D} \frac{x^2}{2} = -\frac{x^3}{6}$$

dur.

Genel çözüm $y = y_h + y_ö = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^x - \frac{x^3}{6}$ dur.

Belirsiz katsayılar ile özel çözüm aransa idi;

$B(x) = 1$ olduğu için $y_ö = A$ şeklinde aranmalıdır fakat bu y_h ile lineer bağımlı olur. Ax, Ax^2 de lineer bağımlı olacağından $y_ö = Ax^3$ şeklinde aranmalıdır. $y_ö' = 3Ax^2$, $y_ö'' = 6Ax$, $y_ö''' = 6A$, $y_ö^{(4)} = 0$ için

$y^{(4)} - y''' = 1 \Rightarrow 0 - 6A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{6} \Rightarrow y_ö = -\frac{1}{6}x^3$ olarak bulunur.

② $y'' - y' = x^2 - x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\ell(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$ olup,

homojen kısmın genel çözümü $y_h = c_1 + c_2 e^x$ dur.

$$y_ö = \frac{1}{D^2 - D}(x^3 - x) = \frac{1}{-D(\underbrace{1 - D}_{\varphi(D)})}(x^3 - x) = \frac{-1}{D}\left(1 + D + D^2 + D^3 + \cdots\right)(x^3 - x)$$

$$= \frac{-1}{D}\left\{x^3 - x + D(x^3 - x) + D^2(x^3 - x) + D^3(x^3 - x) + D^4(x^3 - x) + \cdots\right\}$$

$$= \frac{-1}{D}\left\{x^3 - x + 3x^2 - 1 + 6x + 6 + 0 + 0 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{-1}{D}\left\{x^3 + 3x^2 + 5x + 5\right\}$$

$$= -\frac{x^4}{4} - x^3 - 5\frac{x^2}{2} - 5x \quad \text{dur.}$$

Genel çözüm $y = y_h + y_ö = c_1 + c_2 e^x - \frac{x^4}{4} - x^3 - 5\frac{x^2}{2} - 5x$ dur.

veya belirsiz katsayılar yöntemi ile özel çözüm

$y_ö = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ şeklinde aranır. Fakat bu

$y_h = c_1 + c_2 e^x$ ile lineer bağımlı olup özel çözüm

$y_ö = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$ formunda aranmalıdır.

$y_ö' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D$, $\quad y_ö'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$

olup denklemde yazılırsa

$y_ö'' - y_ö' = x^3 - x$

$12Ax^2 + 6Bx + 2C - 4Ax^3 - 3Bx^2 - 2Cx - D = x^3 - x$

$-4A = 1 \Rightarrow A = -1/4$ $\qquad 2C - D = 0 \Rightarrow D = -5$

$12A - 3B = 0 \Rightarrow B = -1$

$6B - 2C = -1 \Rightarrow C = -5/2$

$\Rightarrow y_ö = -\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 5x$ şeklinde de bulunabilir.

③ $y'' + y' - 2y = e^x + 4\sin x + x^2 - x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2 \Rightarrow$$

$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$ olur.

$$y_ö = \frac{1}{D^2 + D - 2}\left(e^x + 4\sin x + x^2 - x\right)$$

$$= \frac{1}{(D-1)(\underset{\sim 1}{D}+2)} e^x + \frac{1}{\underset{\sim -1}{D^2} + D - 2} 4\sin x + \frac{1}{D^2 + D - 2} x^2 - x$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{1}{D-1} e^x + \frac{1}{\underset{(D+3)}{D-3}} 4\sin x + \frac{1}{-2\left(1 - \frac{D^2+D}{2}\right)}(x^2 - x)$$

$$\overset{0}{\cancel{D^4}} + 2\overset{0}{\cancel{D^3}} + D^2 \to 2$$

$$= \frac{1}{3} e^x \frac{1}{D + \cancel{1} - \cancel{1}} 1 + \frac{D+3}{\underset{\sim -1}{D^2} - 9} 4\sin x - \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{D^2+D}{2} + \left(\frac{D^2+D}{2}\right)^2 + \cdots\right\}(x^2 - x)$$

$$= \frac{1}{3} e^x \frac{1}{D} 1 - \frac{1}{10}(D+3)(4\sin x) - \frac{1}{2}\left\{x^2 - x + \frac{1}{2}\{2 + 2x - 1\} + \frac{2}{4}\right\}$$

$$y_{ö} = \frac{1}{3}e^{x}.x - \frac{1}{10}4\cos x - \frac{12}{10}\sin x - \frac{1}{2}\{x^2+1\}$$

$$= \frac{xe^{x}}{3} - \frac{2}{5}\cos x - \frac{6}{5}\sin x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

bulunur. Genel çözüm

$$y = y_h + y_ö$$

$$= c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{3}xe^{x} - \frac{2}{5}\cos x - \frac{6}{5}\sin x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

olur.

veya belirsiz katsayılar ile çözüm

$y_ö = Ae^{x} + B\sin x + C\cos x + Dx^2 + Ex + F$ şeklinde aranırsa

$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$ için lineer bağımlılık söz konusu olup özel

çözüm

$y_ö = Axe^{x} + B\sin x + C.\cos x + Dx^2 + Ex + F$ şeklinde aranmalıdır.

$$y_0' = Ae^x + Axe^x + B\cos x - C\sin x + 2Dx + E$$

$$y_0'' = 2Ae^x + Axe^x - B\sin x - C\cos x + 2D$$

$$y_0'' + y' - 2y = e^x + 4\sin x + x^2 - x$$

$$\Rightarrow 2Ae^x + \cancel{Axe^x} - B\sin x - C\cos x + 2D + Ae^x + \cancel{Axe^x} + B\cos x - C\sin x + 2Dx$$
$$+ E - 2\cancel{Axe^x} - 2B\sin x - 2C\cos x - 2Dx^2 - 2Ex - 2F = e^x + 4\sin x + x^2 - x$$

$$\Rightarrow$$

$$3Ae^x + \sin x\{-3B - C\} + \cos x\{-3C + B\} + x^2\{-2D\} + x\{2D - 2E\} + 2D + E - 2F$$
$$= e^x + 4\sin x + x^2 - x$$

$$3A = 1 \Rightarrow A = 1/3$$

$$-3B - C = 4 \quad , \quad -3C + B = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{2}{5} \quad , \quad B = -\frac{6}{5}$$

$$-2D = 1 \Rightarrow D = -1/2$$

$$2D - 2E = -1 \Rightarrow E = 0$$

$$2D + E - 2F = 0 \Rightarrow F = -1/2$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{1}{3}xe^x - \frac{6}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad \text{bulunur.}$$

4) $(D^2-1)y = x^2\cos x$ denkleminin özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{D^2-1}x^2\cos x = \frac{1}{D^2-1}x\cdot(x\cos x) = x\cdot\frac{1}{D^2-1}x\cos x - \frac{2D}{(D^2-1)^2}x\cos x$$

$$= x\left\{x\frac{1}{\underset{-1}{D^2}-1}\cos x - \frac{2D}{(\underset{(-1)}{D^2}-1)^2}\cos x\right\} - 2D\left\{x\cdot\frac{1}{(\underset{-1}{D^2}-1)^2}\cos x - \frac{4D}{(\underset{-1}{D^2}-1)^3}\cos x\right\}$$

$$= x\left\{-\frac{x}{2}\cos x - \frac{1}{2}D\cos x\right\} - 2D\left\{\frac{x}{4}\cos x + \frac{1}{2}D\cos x\right\}$$

$$= x\left\{-\frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right\} - 2D\left\{\frac{x}{4}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right\}$$

$$= x\left\{-\frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right\} - 2\left\{\frac{1}{4}\cos x - \frac{x}{4}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(-x^2+1)\cos x + x\sin x$$

şeklindedir.

veya belirsiz katsayılar yöntemi ile çözüm aranırsa;

$f(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 \Rightarrow$

$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ dır.

$B(x) = x^2 \cos x$ olduğundan

$y_0^u = (Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x$

şeklinde aranmalıdır.

İki kez türev alınıp denklemde yerine yazılıp sağ-sol eşitliğinden A, B, C, D, E, F belirsiz katsayıları bulunursa

$\left(A = -\frac{1}{2},\ B = 0,\ C = \frac{1}{2},\ D = 0,\ E = 1,\ f = 0 \right)$

$y_0^u = -\frac{x^2}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x + x \sin x$ olur.

Ödev: $y'' - 4y' = 32x\sin^2 x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Ödev: $y'' + 6y' + 8y = \cosh 2x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Ödev: $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

1.4.3. Sabitlerin (Parametrelerin) Değişimi Yöntemi

Önceki bölümlerde $L(D)y = B(x)$ denkleminin özel çözümlerinin $B(x)$'in belirli fonksiyon durumları için nasıl bulunduğunu veren yöntemler incelendi. Bu kısımda $B(x)$'e bağlı olmayan özel çözüm bulma yöntemini vereceğiz. Bu yönteme parametrelerin değişimi veya Lagrange yöntemi denmektedir. Bu yöntem $L(D)y = B(x)$ denklemine ait $L(D)y = 0$ homojen lineer denklemin n tane lineer bağımsız çözümünün (dolayısıyla genel çözümünün) bilinmesi halinde $L(D)y = B(x)$ denkleminin bir özel çözümünün bulunmasında etkilidir.

Teorem 16: $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonları $\ell(D)y=0$ homojen denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ fonksiyonları I üzerinde sıfır olmayan ve

$$\left.\begin{array}{l} v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) + \cdots + v_n'(x)y_n(x) = 0 \\ v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) + \cdots + v_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ v_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + v_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + v_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = B(x) \end{array}\right\} \ldots (17)$$

eşitliklerini sağlayan fonksiyonlar ise $\ell(D)y=B(x)$ denkleminin özel çözümü

$$y_ö = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) + \cdots + v_n(x)y_n(x) \quad \ldots (18)$$

ile verilir.

İspat: Öncelikle (18) ile tanımlanan $y_ö$ fonksiyonunun $\ell(D)y=B(x)$ denklemini sağladığını (çözüm olduğunu) gösterelim. $y_ö$ nın ardışık türevlerini alarak ve her adımda (17) eşitliklerini kullanarak

$$y_\ddot{o}' = v_1 y_1' + v_2 y_2' + \dots + v_n y_n'$$
$$y_\ddot{o}'' = v_1 y_1'' + v_2 y_2'' + \dots + v_n y_n''$$
$$\vdots$$
$$y_\ddot{o}^{(n-1)} = v_1 y_1^{(n-1)} + v_2 y_2^{(n-1)} + \dots + v_n y_n^{(n-1)}$$
$$y_\ddot{o}^{(n)} = v_1 y_1^{(n)} + v_2 y_2^{(n)} + \dots + v_n y_n^{(n)} + B(x)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler $\ell(D)y = B(x)$ de yerine konursa

$$\ell(D) y_\ddot{o} = v_1 \, \ell(D) y_1 + v_2 \, \ell(D) y_2 + \dots + v_n \, \ell(D) y_n + B(x)$$

olur. $i=1,2,\dots,n$ için y_i ler $\ell(D)y = 0$ denkleminin çözümleri olduğundan $\ell(D) y_\ddot{o} = B(x)$ elde edilir. O halde $y_\ddot{o}$, $\ell(D)y = B(x)$ denkleminin bir özel çözümüdür.

Şimdi de (17) eşitliklerini sağlayan $v_1, v_2, \dots, v_n$ fonksiyonlarının varlığını gösterelim. (17) sistemi $v_1', v_2', \dots, v_n'$ bilinmeyenli bir lineer denklem sistemidir ve katsayılar determinantı $W(y_1, y_2, \dots y_n)(x)$ olup y_i ler lineer bağımsız olduğundan

$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) \neq 0$ dır. Dolayısıyla sistemin tek bir çözümü vardır. Bu çözüm de

$$v_1' = f_1(x), \quad v_2' = f_2(x), \ldots \quad v_n' = f_n(x)$$

şeklinde ise buradan integral alınarak

$$v_1 = \int f_1(x)dx, \quad v_2 = \int f_2(x)dx, \quad \ldots \quad v_n = \int f_n(x)dx$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $L(D)y = B(x)$ denkleminin özel çözümü

$$y_0^{ö} = y_1 \cdot \int f_1(x)dx + y_2 \int f_2(x)dx + \cdots + y_n \int f_n(x)dx$$

dur.

Not 1: Bu yöntem hem sabit katsayılı hem de değişken katsayılı homojen olmayan tüm lineer denklemlere uygulanabilir.

2: Özel çözüm keyfi sabit içermeyeceği için $v_1', v_2', \ldots, v_n'$ fonksiyonlarının integralinden gelen integral sabitleri (keyfi sabitler) fonksiyonlara katılmamıştır.

Örnek! $y''' + y' = \sec x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz

$\ell(\lambda) = \lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \mp i$ olup

$y_h = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ dur.

özel çözüm $\quad y_ö = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x) + v_3(x) y_3(x)$

$$= v_1 . 1 + v_2 . \cos x + v_3 . \sin x$$

formunda sabitin değişimi ile aranırsa;

$$\left.\begin{aligned} v_1' + v_2' \cos x + v_3' \sin x &= 0 \\ -v_2' \sin x + v_3' \cos x &= 0 \\ -v_2' \cos x - v_3' \sin x &= \sec x \end{aligned}\right\}$$

v_1', v_2', v_3' bilinmeyenlerine bağlı denklem sistemi elde edilir. Cramer yöntemi ile çözüm bulunabilir. Şöyleki

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0 \text{ olmak üzere}$$

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \sec x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{\cos^2 x \sec x + \sin^2 x \sec x}{1} = \sec x$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \sec x & -\sin x \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-\sec x \cdot \cos x}{1} = -1$$

$$v_3' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \sec x \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-\sin x \sec x}{1} = -\tan x$$

$$v_1' = \sec x \Rightarrow v_1(x) = \int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x|$$

$$v_2' = -1 \Rightarrow v_2(x) = \int -1\, dx = -x$$

$$v_3' = -\tan x \Rightarrow v_3(x) = \int -\frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \ln|\cos x|$$

$\Rightarrow y_ö = \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + \ln(\cos x)\cdot \sin x$ olarak bulunur.

$$y = y_h + y_ö = c_1 + c_2\cos x + c_3 \sin x + \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + \sin x \cdot \ln(\cos x)$$

genel çözümdür.

Örnek: $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ olup

$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ şeklindedir.

$y_ö = v_1(x) e^x + v_2(x) e^{2x}$ şeklinde sabitin değişimi yöntemi ile aranırsa

$$\left.\begin{aligned} v_1' e^x + v_2' e^{2x} &= 0 \\ v_1' e^x + 2v_2' e^{2x} &= \frac{e^{2x}}{e^x+1} \end{aligned}\right\}$$ denklem sistemi elde edilir. Buradan

$v_1' = -\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $v_2' = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ bulunur. İntegral alınırsa

$v_1' = \dfrac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow v_1(x) = -\ln(e^x+1)$

$v_2' = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \Rightarrow v_2(x) = -\ln(1+e^{-x})$ dur.

Buna göre

$$y_ö = v_1(x)e^x + v_2(x)e^{2x}$$
$$= -e^x \ln(e^x+1) - e^{2x}\ln(1+e^{-x}) \quad \text{olur.}$$

Genel çözüm

$$y = y_h + y_ö$$
$$= c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^x \ln(e^x+1) - e^{2x}\ln(1+e^{-x})$$

olarak bulunur.